

Problema matematică 3

$$M_1 = \{1\} = \left\{ \frac{1 \cdot 2}{2} \right\}$$

$$M_2 = \{1, 3\} = \{1, 1+2\} = \left\{ \frac{1 \cdot 2}{2}, \frac{2 \cdot 3}{2} \right\}$$

$$M_3 = \{1, 3, 6\} = \{1, 1+2, 1+2+3\} = \left\{ \frac{1 \cdot 2}{2}, \frac{2 \cdot 3}{2}, \frac{3 \cdot 4}{2} \right\}$$

$$M_4 = \{1, 3, 6, 10\} = \{1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4\} = \left\{ \frac{1 \cdot 2}{2}, \frac{2 \cdot 3}{2}, \frac{3 \cdot 4}{2}, \frac{4 \cdot 5}{2} \right\}$$

$$M_4 = \{1, 3, 6, 10, 15\} = \{1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, 1+2+3+4+5\} = \left\{ \frac{1 \cdot 2}{2}, \frac{2 \cdot 3}{2}, \frac{3 \cdot 4}{2}, \frac{4 \cdot 5}{2}, \frac{5 \cdot 6}{2} \right\}$$

$$M_k = \left\{ 1, 3, 6, 10, 15, \dots, \frac{k(k+1)}{2} \right\} = \\ = \{1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, 1+2+3+4+5, \dots, 1+2+3+\dots+k\} = \\ = \left\{ \frac{1 \cdot 2}{2}, \frac{2 \cdot 3}{2}, \frac{3 \cdot 4}{2}, \frac{4 \cdot 5}{2}, \frac{5 \cdot 6}{2}, \dots, \frac{k(k+1)}{2} \right\}$$

a)

$$55 = \frac{10 \cdot 11}{2} \Rightarrow \{55\} = M_{10} - M_9 \Rightarrow \boxed{k=10, p=9}$$

b)

$2006 \in M_t \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, k \leq t$ astfel încât $2006 = \frac{k(k+1)}{2} \Leftrightarrow k(k+1) = 4012 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}$ prin urmare, nu există $t \in \mathbb{N}$ astfel încât $2006 \in M_t$.

Altfel,

$$\frac{62 \cdot 63}{2} = 1953, \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016, \text{ prin urmare, nu există } t \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } 2006 \in M_t.$$

c)

Numerele divizibile cu 5 din M_{2006} sunt cele de forma $\frac{(5k-1) \cdot 5k}{2}$ și $\frac{5k \cdot (5k+1)}{2}$ unde $k = \overline{1, 401}$.

$$\text{Exemplu: } \frac{4 \cdot 5}{2}, \frac{5 \cdot 6}{2}, \frac{9 \cdot 10}{2}, \frac{10 \cdot 11}{2}, \dots, \frac{2004 \cdot 2005}{2}, \frac{2005 \cdot 2006}{2}.$$

Pentru fiecare multiplu al lui 5 avem două numere divizibile cu 5. Vom afla câți multipli ai lui 5 sunt de la 1 la 2005 și vom înmulți cu 2.

$2005 : 5 = 401$ rezultă că sunt 401 multipli ai lui 5 de la 1 la 2005, prin urmare, avem

$401 \cdot 2 = 802$ numere divizibile cu 5 în M_{2006} .