## Inegalitate

$$a^2+b^2+c^2-6abc\geq a^3+b^3+c^3 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-a^3-b^3-c^3\geq 6abc \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2(1-a)+b^2(1-b)+c^2(1-c)\geq 6abc \qquad (1)$$

Deoarece $a,b,c\in(0,1)$ rezultă că fiecare din cei trei termeni ai membrului stâng sunt strict pozitivi, prin urmare putem aplica inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică $(AM-GM)$.

$$a^2(1-a)+b^2(1-b)+c^2(1-c)\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2(1-a)(1-b)(1-c)} \qquad (2)$$

Din ipoteză, $a+b+c=1$ rezultă că:

$$(1-a)(1-b)(1-c)=(a+b+c-a)(a+b+c-b)(a+b+c-c)=$$
$$=(b+c)(a+c)(a+b) \qquad (3)$$

Dar, din $(AM-GM)$ avem:

$$b+c\geq 2\sqrt{bc}$$
$$a+c\geq 2\sqrt{ac}$$
$$a+b\geq 2\sqrt{ab}$$
$$\overline{(b+c)(a+c)(a+b)\geq 8abc} \qquad (4)$$

Relațiile $(3)$ şi $(4)$ înlocuite în $(2)$ dau:

$$a^2(1-a)+b^2(1-b)+c^2(1-c)\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2(1-a)(1-b)(1-c)}=$$
$$=3\sqrt[3]{(abc)^2(b+c)(a+c)(a+b)}\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2\cdot 8abc}=3\sqrt[3]{(2abc)^3}=6abc$$