Identitate parte întreagă

Ştim că resturile împărțirii unui pătrat perfect la 4 sunt 0 şi 1, adică orice pătrat perfect este fie multiplu de 4 $(4k,\ k\geq 1)$, fie multiplu de 4 plus 1 $(4k+1,\ k\geq 2)$. Cum s-ar traduce acest rezultat?

Pentru orice $n\in\mathbb{N}$, *există un* $k_n\in\mathbb{N}^*$ *astfel încât*:

$$\boxed{k_n^2\leq 4n+1<4n+2<4n+3<(k_n+1)^2 \qquad (1)}$$

Relația (1) ne spune, de fapt, că $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right]=k_n$.

<u>Voi arăta că</u> $\sqrt{4n+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$ <u>ceea ce va închide demonstrația</u>.

$$\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2=n+n+1+2\sqrt{n^2+n}=2n+1+2\sqrt{n^2+n}>$$

$$>2n+1+2n=4n+1\Rightarrow \boxed{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}>\sqrt{4n+1} \qquad (2)}$$

$$\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2=n+n+1+2\sqrt{n^2+n}=2n+1+2\sqrt{n^2+n}<$$

$$<2n+1+2\sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}}=2n+1+2\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$=2n+1+2\left(n+\frac{1}{2}\right)=2n+1+2n+1=4n+2\Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2} \qquad (3)}$$

Din (2) şi (3) rezultă că:

$$\sqrt{4n+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$$

Cum $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]=k_n\Rightarrow\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=k_n$ $\square$

Observație. De fapt, are loc:

Pentru orice număr natural n, *au loc egalitățile*:

$$\boxed{\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right]}$$