Evaluarea unei limite prin doua metode

Victor Armegioiu

May 2015

Teorema 1 :

O functie marginita f pe un compact finit de forma $[a, b]$ este integrabilia daca poate fi aproximata prin sume Riemann superioare si inferioare astfel incat diferenta integralelor acestor sume poate fi redusa arbitrar de mult. Aceasta definitie este apoi extinsa peste functii nemarginite cat si intervale infinite prin limita; aceste cazuri sunt incadrate prin integrale improprii . Daca I este un interval oarecare si f este o functie peste I astfel incat integrala (posibil improprie)

$$\int_I |f(u)|du < \infty$$

atunci functia f este absolut integrabila peste compactul I .

Teorema 2 (Riemann - Lebesgue) :

Fie f o functie absolut integrabila in sens Riemann peste compactul finit, sau infinit I, atunci :

$$\lim_{n\to\infty} \int_I |f(u)| sin(nu)du = 0$$

Demonstratie.

Presupunem ca intervalul de definitie este compact, $I = [a, b]$, si ca functia f este constanta si egala cu 1 pe tot intervalul.Astfel

$$\int_a^b f(u)sin(nu)du = \int_a^b sin(nu)du = \frac{1}{n}[cos(na) - cos(nb)]$$

obtinem

$$|\int_a^b f(u)sin(nu)du| \le \frac{2}{n} \to 0, n \to \infty$$

Acum sa presupunem ca f este constanta pe portiuni, ceea ce inseamna ca I (considerat in continuare compact) este subdivizat intr-un numar finit de subintervale $I_k = (a_{k-1}, a_k), k = 1, 2, .., .N(a_0 = a, a_N = b)$, si ca $f(u)$ are o anumita valoare constanta c_k pentru oricare $u \in I_k$. Ceea ce inseamna ca putem admite

$$f(u) = \sum_{k=1}^{k=N} c_k g_k(u)$$

unde $g_k(u) = 1$ peste I_k si $g_k(u) = 0$ in afara lui I_k.Obtinem

$$\int_a^b f(u) sin(nu) du = \sum_{k=1}^{k=N} \int_a^b c_k g_k(u) sin(nu) du = \sum_{k=1}^{k=N} c_k \int_{a_{k-1}}^{a_k} sin(nu) du.$$

Aceasta este o suma de multi termeni, iar prin considerarea cazului anterior, acestia tind la 0 pe masura ce $n \to \infty$. Astfel, ipoteza este valida pentru acest f.

Fie, in continuare, f o functie arbitrara care este integrabila Riemann pe $I = [a, b]$. Fie ϵ un numar pozitiv arbitrar. Prin definitia integralei Riemann, exista o functie constanta pe portiuni g astfel incat

$$\int_a^b |f(u) - g(u)| du \leq \frac{\epsilon}{2}$$

(Fie g o functie a carei integrala este o suma Riemann a lui f) Atunci :

$$|\int_a^b f(u) sin(nu) du| = |\int_a^b [f(u) - g(u)] sin(nu) du + \int_a^b g(u) sin(nu) du|$$

$$\leq \int_a^b |f(u) - g(u)||sin(nu)| du + |\int_a^b g(u) sin(nu) du|$$

$$\leq \int_a^b |f(u) - g(u)| du + |\int_a^b g(u) sin(nu) du|.$$

Ultima integrala tinde la 0 pe masura ce $n \to \infty$, considerand cazul precedent. Asadar, exista o valoare n_0 asa incat aceasta integrala este mai mica decat $\epsilon/2$ pentru oricare $n > n_0$. Pentru acesti n, membrul stang este mai mic decat ϵ, ceea ce demonstreaza presupunerea initiala. In final, nu mai este necesara impozitia conditiei conform careia I este un compact. Fie $\epsilon > 0$ predefinit. Din moment ce f este absolut integrabila, exista un subinterval compact $J \subset I$ astfel incat $\int_{I/j} |f(u)| du < \epsilon$. Putem afirma

$$|\int_I f(u) sin(nu) du| \leq |\int_J f(u) sin(nu) du| + \int_{I/j} |f(u)| du,$$

unde primul termen tinde la 0 prin cazul precedent, astfel incat integrala se evalueaza la un numar mai mic decat ϵ pentru n suficient de mare;cel de-al doilea termen este mereu mai mic decat ϵ. Acest aspect completeaza demonstratia.

Fireste, factorul $sin(nu)$ din integrand poate fi inlocuit in mod analog cu $cos(nu)$ sau cu functia complexa e^{inu}, obtinand acelasi rezultat.

Conform teoremei demonstrate anterior, putem evalua cu usurinta

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(nx)}{x^2+4}\,dx$$

pentru a obtine, in mod evident , $\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(nx)}{x^2+4}\,dx = 0$.

Sa consideram, in continuare, o abordare diferita, ce utilizeaza un numar mai mic de rezultate predefinite. Vom folosi metoda diferentierii sub semnul de integrala dupa un parametru adecvat, in stilul lui Feynman, pentru o problema si mai larga, ingloband intreaga axa reala.

Definim, pentru orice $n > 0$

$$F(n) = \int_R \frac{cos(nx)}{x^2+4}dx$$

Pentru simplificare, efectuam o schimbare de variabila, fie $y = nx$, deci $dy = ndx$ si

$$F(n) = \int_R \frac{cos(y)}{4+\frac{y^2}{n^2}}\frac{dy}{n} = \int_R \frac{ncos(y)}{y^2+n^2}dy$$

Gasim

$$F'(n) = \int_R \frac{\partial^2}{\partial n^2}(\frac{ncos(y)}{n^2+y^2})dy = \int_R \frac{\partial^2}{\partial n^2}(\frac{n}{n^2+y^2})cos(y)dy$$

Remarcam faptul ca $(\frac{\partial^2}{\partial n^2})(\frac{n}{n^2+y^2}) = -(\frac{\partial^2}{\partial y^2})(\frac{n}{n^2+y^2})$, deci

$$F''(n) = -\int_R \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\frac{n}{n^2+y^2})cos(y)dy$$

Integrand prin parti expresia lui $F''(n)$ de doua ori (incepand cu $u = -cos(y)$ si $dv = (\frac{\partial^2}{\partial n^2})(\frac{n}{n^2+y^2})$

$$F''(n) = -\int_R \frac{\partial}{\partial y}(\frac{n}{n^2+y^2})sin(y)dy = \int_R \frac{\partial}{\partial y}(\frac{n}{n^2+y^2})cos(y)dy = F(n).$$

Cum $F''(n) = F(n)$ obtinem o ecuatie diferentiala a carei solutie generala este

$c_1e^n + c_2e^{-n}$. Pentru a determina constantele in cauza, analizam comportamentul integralei in jurul $n \to 0^+$ cat si $n \to \infty$. Pe masura ce $n \to 0^+$, integrandul converge punctual la $\frac{1}{1+x^2}$ asa ca ne asteptam ca $\int_R \frac{dx}{x^2+1} = \pi$. Pentru a justifica aceasta, vom margini valoarea absoluta a diferentei

$$|\int_R \frac{cos(nx)}{1+x^2}dx - \int_R \frac{dx}{x^2+1}dx| \leq \int_R \frac{|cos(nx)-1|}{1+x^2}dx$$

printr-o expresie care devine arbitrar de mica pe masura ce $n \to 0^+$. Pentru orice $N > 0$, desfacem integrala peste $\Re$ in regiunile $|x| \leq N$ si $|x| \geq N$. Avem

$$\int_R \frac{|cos(nx)-1|}{1+x^2}dx \leq \int_{|x|\leq N} \frac{|cos(nx)-1|}{1+x^2}dx + \int_{|x|\geq N} \frac{2}{1+x^2}dx$$

$$\leq \int_{|x|\leq N} \frac{n|x|}{1+x^2}dx + \int_{|x|\geq N} \frac{2}{1+x^2}dx$$

$$= n\int_{|x|\leq N} \frac{|x|}{1+x^2}dx + 4(\frac{\pi}{2} - arctg(N)).$$

Selectand N suficient de mare $\pi/2 - arctg(N) \to 0$, apoi putem reduce primul termen prin luarea lui n suficient de mic. Pentru $n \to 0^+$ obtinem $\pi = c_1 + c_2$, deci

$$\int_R \frac{cos(nx)}{x^2+1}dx = c_1e^n + (\pi - c_1)e^{-n}$$

In pasul final, consideram $n \to \infty$ pentru relatia precedenta, integram prin parti dupa $u = \frac{1}{1+x^2}$ si $dv = cos(nx)dx$, pentru a obtine

$$\int_R \frac{cos(nx)}{1+x^2}dx = \frac{1}{n}\int_R \frac{2xsin(nx)}{(1+x^2)^2}dx$$

Valoarea absoluta a termenului din dreapta este marginita de o constanta reala impartita la n, care tinde la 0 pe masura ce $n \to \infty$. In concluzie, $c_1e^n + (\pi - c_1)e^{-n} \to 0$. Se forteaza $a = 0$, astfel, ceea ce implica $F(n) = \pi e^{-n}$. Pentru $n \to \infty$, in mod evident, $F(n) \to 0$.

O metoda alternativa vizeaza evaluarea limitei, utilizand reziduul in polul $2i$ care se reduce la calculul

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{2n}} = 0.$$