Ecuatie parte întreagă

Ecuația $\left[x \sin \frac{1}{x}\right] = \frac{x}{2010}$ se rescrie:

$$2010\left[x \sin \frac{1}{x}\right] = x$$

Cum membrul stâng este un număr întreg, multiplu de 2010, rezultă, dacă ecuația ar avea soluție, că şi membrul drept este număr întreg, multiplu de 2010, adică x ar avea forma: $x = 2010k,\ k \in \mathbb{Z}^*$.
Ecuația devine:

$$\boxed{\left[2010k \sin \frac{1}{2010k}\right] = k,\ \ k \in \mathbb{Z}^*}$$

Deoarece funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ este pară,

$$f(-x) = -x \sin\left(-\frac{1}{x}\right) = -x \cdot \left(-\sin \frac{1}{x}\right) = x \sin \frac{1}{x} = f(x),$$

<u>este suficient să căutăm soluțiile strict pozitive</u>, adică obținute pentru $k \in \mathbb{Z}_+^*$.

Ştim însă că pentru orice $a \in \mathbb{R},\ a > 0$ avem inegalitatea (clasică):

$$\boxed{\sin a < a}$$

Ca atare,

$$2010k \sin \frac{1}{2010k} < 2010k \cdot \frac{1}{2010k} = 1 \Rightarrow \left[2010k \sin \frac{1}{2010k}\right] = 0 \neq k,\ k \in \mathbb{Z}_+^*$$

Deci ecuația nu are soluții strict pozitive şi, din motive de paritate, nici soluții strict negative.