MATHÉMATIQUES

CORRIGÉ

SESSION 2012

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.**

1ère partie : QCM (15 points)

3,75 points par bonne réponse

1. A
2. D
3. C
4. D

2ème partie : questions de cours (15 points)

Question n° 1 :

Un questionnaire à choix multiple (QCM) est constitué de 6 questions. Pour chacune d'entre elles, 3 réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un candidat répond au hasard.

1. Déterminer le nombre de réponses possibles à ce QCM. (***2 points***)

Le nombre de réponses possibles à ce QCM est $3^6 = 729$.

2. **a –** Déterminer le nombre de cas où les réponses du candidat aux 4 premières questions sont exactes et aux deux autres fausses. (***2 points***)

Pour chacune des quatre premières questions, il n'y a qu'une seule réponse possible ; à chacune des questions 5 et 6, il y a deux résultats (faux) possibles. Et, à chaque réponse fausse à q_5, on peut associer une réponse fausse à q_6.

Il y a donc $2\times2 = 4$ cas où les réponses aux quatre premières questions sont exactes et deux autres fausses.

b – Combien y a-t-il de possibilités que le candidat réponde correctement à exactement 4 questions ? (***2 points***)

Il y a C_6^2 façons de choisir deux questions parmi 6 et d'après **a –** , il y a 4 cas pour que les réponses du candidat à quatre questions précises soient exactes et fausses aux deux autres.

Il y a donc $4\times C_6^2 = 60$ cas pour que le candidat réponde correctement à exactement quatre questions.

Question n° 2 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (unité : 2cm.)
On désigne par *A*, *B* et *C* les points du plan ayant pour affixes respectives :

$z_A = 4 + \frac{5}{2}i$; $z_B = 4 - \frac{5}{2}i$ et $z_C = 2 + \frac{3}{2}i$.

1. Placer les points *A*, *B* et *C* dans un repère. (ci-après) (***2 points***)
2. Quelle est la nature du triangle *ABC* ? (***3 points***)

   $z_A = 4+\frac{5}{2}i$; $z_B = 4-\frac{5}{2}i$; $z_c = 2+\frac{3}{2}i$

   Il faut utiliser la forme complexe pour calculer les longueurs :

   $$AB^2 = |z_B - z_A|^2 = \left|(4-4)+i(-\frac{5}{2}-\frac{5}{2})\right|^2 = |-5i|^2 = 5^2 = 25$$

   $$AC^2 = |z_C - z_A|^2 = \left|(2-4)+i(\frac{3}{2}-\frac{5}{2})\right|^2 = |-2-i|^2 = 5$$

   $$BC^2 = |z_C - z_B|^2 = \left|(2-4)+i(\frac{3}{2}+\frac{5}{2})\right|^2 = |-2+4i|^2 = 20$$

   $AB^2 = BC^2 + AC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle *ABC* est rectangle en *C*.

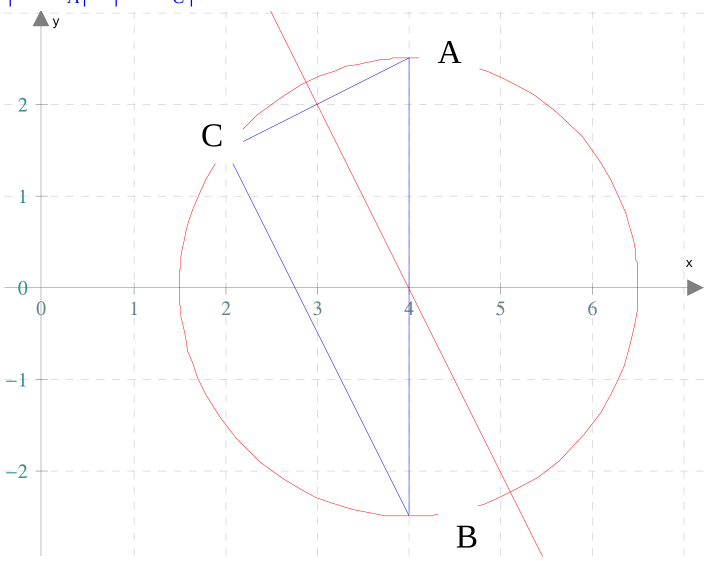
3. (D) désigne l'ensemble des points *M* du plan dont l'affixe *z* vérifie la relation : $|z - 4 - \frac{5}{2}i| = |z - 2 - \frac{3}{2}i|$.

   Quelle est la nature de (D) ? (donner une démonstration algébrique (en posant $z = x + iy$) ou une démonstration géométrique) (***4 points***)

$$\left|z-4-\frac{5}{2}i\right| = \left|z-2-\frac{3}{2}i\right|$$

Cette relation équivaut à

$|z - z_A| = |z - z_C|$, c'est à dire $AM = MC$.



$$\left|z-4-\frac{5}{2}i\right| = \left|z-2-\frac{3}{2}i\right|$$

$$\left|x+iy-4-\frac{5}{2}i\right| = \left|x+iy-2-\frac{3}{2}i\right|$$

$$\left|x-4+i(y-\frac{5}{2})\right| = \left|x-2+i(y-\frac{3}{2})\right|$$

$$(x-4)^2+(y-\frac{5}{2})^2 = (x-2)^2+(y-\frac{3}{2})^2$$

$$x^2-8x+16+y^2-5y+\frac{25}{4} = x^2-4x+4+y^2-3y+\frac{9}{4}$$

$$4x+2y-16=0$$

$$2x+y-8=0$$

$$y=-2x+8$$

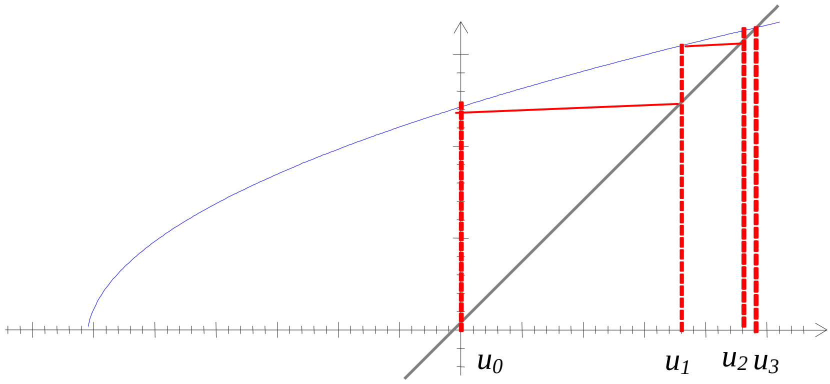
(D) est donc la médiatrice du segment [*AC*].

Partie 2 : compétences — 60 points

Exercice n°1 : 25 points

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. On admet que $\forall\ n \in$ IN, $0 \le u_n \le 3$.

a) Représenter les 4 premiers termes de (u_n) sur le graphique ci-dessous : (***5 points***)



b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante. (***6 points***)
On note P(n) la proposition « $u_n \le u_{n+1}$ ».
Initialisation : P(0) est vraie car $u_0 \le u_1$ (en effet $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{6}$).
Hérédité : on considère que pour un entier naturel n, $u_n \le u_{n+1}$.
Alors $u_n + 6 \le u_{n+1} + 6$ et $\sqrt{u_n + 6} \le \sqrt{u_{n+1} + 6}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;+\infty[$.
Donc $u_{n+1} \le u_{n+2}$ et P(n+1) est vraie.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n \le u_{n+1}$. La suite (u_n) est croissante.

c) Démonter que (u_n) est convergente. (***6 points***)
(u_n) est croissante et majorée, donc elle converge vers un réel l (d'après le théorème de la convergence monotone).

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. (***8 points***)

Comme $f : x \mapsto \sqrt{x+6}$ est continue sur $[0\ ;+\infty[$, l est tel que $l = f(l)$, soit $l = \sqrt{l+6}$.
Comme $l \ge 0$, on a $l^2 = l+6$ et $l^2 - l - 6 = 0$.
$\Delta = (-1)^2 - 4\times1\times(-6) = 25 > 0$ donc le trinôme admet deux racines :
$$l_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ et } l_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{2} = -2.$$
Et comme $l \ge 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Exercice n°2 : 35 points

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = (2+\cos x)\, e^{1-x}$.

1. Montrer que, pour tout x de IR : $f(x) > 0$. (***4 points***)

Pour tout x réel, $\cos x \geq -1 \Leftrightarrow 2+\cos x \geq 1$ donc $2+\cos x > 0$ de plus, on sait que pour tout réel x, $e^{1-x} > 0$. On en déduit que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

2. a) Montrer que, pour tout x de IR : $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$. (***4 points***)

$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos x\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin x\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \cos x + \sin x$$

b) En déduire que, pour tout x de IR : $2 + \cos x + \sin x > 0$. (***4 points***)

Or, pour tout réel x, $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \geq -1 \Leftrightarrow 2+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \geq 2-\sqrt{2}$. Sachant que $2-\sqrt{2} > 0$ et d'après l'égalité ci-dessus, on en déduit que $2+\cos x + \sin x > 0$.

c) Montrer que f est strictement décroissante sur IR. (***5 points***)

f est le produit de deux fonction dérivables sur IR : la fonction $u : x \mapsto 2+\cos x$, composée de la fonction cosinus par une fonction affine et la fonction $v : x \mapsto e^{1-x}$ composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle.
f est donc dérivable sur IR et $f' = u'v + uv'$. D'après le théorème donnant la fonction dérivée d'une fonction composée, $u'(x) = -\sin x$ et $v'(x) = -e^{1-x}$ d'où :
$f'(x) = -e^{1-x}(2+\cos x + \sin x)$. Or on a montré que $2+\cos x+\sin x > 0$ et on sait que pour tout réel x, $e^{1-x} > 0$.
On en déduit que $f'(x) < 0$ sur IR et donc que f est strictement décroissante sur IR.

3. a) Montrer que, pour tout x de IR : $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$. (***4 points***)

On sait que, pour tout réel x, $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2+\cos x \leq 3$ et donc, puisque $e^{1-x} > 0$, on a bien $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.

b) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. (***5 points***)

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$. Puisque $f(x) \geq e^{1-x}$, on en déduit, par comparaison, que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 3e^{1-x} = 0$.

Puisque $0 \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$, on en déduit, d'après le théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$. (***4 points***)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc l'axe des abscisses est une asymptote pour la courbe représentative de f en $+\infty$.

4. Quel théorème permet d'établir que, sur l'intervalle $[0 ; \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α ? (***5 points***)

La fonction f est dérivable, elle est donc continue sur IR. De plus, on a montré que f est strictement décroissante sur IR.
Or $f(0) = 3e > 3$ et $f(\pi) = e^{1-\pi} < 3$.
On en déduit, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires** (ou **théorème de la bijection**), qu'il existe une unique solution α à l'équation $f(x) = 3$.